



Prof. Dr. H.-D. Donner

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

25. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Tutorium 6

Aufgabe 1: Berechnen Sie das Volumen der folgenden Menge:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x^2 + z^2 \leq 1\}$$

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ lokal-integrierbar. Zeigen Sie, dass die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \pm\infty\}$$

eine Nullmenge ist.

Aufgabe 3: Sei $P_k = [2k, 2k+1) \times [k, k+1)$, $Q_k = [2k+1, 2k+2) \times [k, k+1) \subseteq \mathbb{R}^2$ für $k \in \mathbb{N}$ und sei

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{1}_{P_k} - \mathbf{1}_{Q_k}).$$

Zeigen Sie, dass f lokal-integrierbar aber nicht integrierbar ist. Zeigen Sie, dass das Integral $\int (\int f(x, y) dx) dy$ existiert, $\int (\int f(x, y) dy) dx$ aber nicht.

Aufgabe 4: Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$A_k = \bigcup_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{k}}{2^m}, \frac{\sqrt{k+1}}{2^m} \right].$$

Zeigen Sie, dass die Folge der charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_{A_k}$ für kein $x > 0$ in x punktweise konvergiert, jedoch L^1 -konvergent ist.



Prof. Dr. H.-D. Donner

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

7. Dezember 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsskizze zu Tutorium 6

Aufgabe 1: Da für $(x, y, z) \in A$ gilt, dass $x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + y^2 + x^2 + z^2 \leq 2$, ist A beschränkt. Außerdem ist A abgeschlossen, also kompakt und damit integrierbar. Für $x \in [-1, 1]$ ist $A_x = [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]^2$, also:

$$v(A) = \int_{-1}^1 v(A_x) dx = \int_{-1}^1 (2\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{-1}^1 (4-4x^2) dx = 4x - \frac{4}{3}x^3 \Big|_{-1}^1 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Aufgabe 2: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist f auf $[-k, k]^n$ integrierbar. Insbesondere ist auch $|f|$ auf $[-k, k]^n$ integrierbar, also die Menge A_k der $x \in [-k, k]^n$ mit $|f(x)| = \infty$ eine Nullmenge. Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist wieder eine Nullmenge und $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

Aufgabe 3: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt. Dann ist K beschränkt, also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass K die Quader P_k und Q_k für $k > N$ nicht schneidet. Das heißt,

$$\mathbf{1}_K \cdot f = \mathbf{1}_K \cdot \sum_{k=0}^N (\mathbf{1}_{P_k} - \mathbf{1}_{Q_k}).$$

Da die Summe auf der rechten Seite eine Treppenfunktion ist, ist diese integrierbar, also auch ihr Produkt mit $\mathbf{1}_K$. Es folgt, dass f auf K integrierbar ist. Da dies für jede kompakte Menge K gilt, ist also f lokal-integrierbar.

Für $y \in [k, k+1)$ ist $f(x, y) = \mathbf{1}_{[2k, 2k+1)}(x) - \mathbf{1}_{[2k+1, 2k+2)}(x)$, und für $y < 0$ ist $f(x, y) = 0$, also ist $\int f(x, y) dx = 0$ für alle y . Damit ist gezeigt, dass das erste Integral 0 ist. Für $x \in [2k, 2k+1)$ ist $f(x, y) = \mathbf{1}_{[k, k+1)}(y)$, also $\int f(x, y) dy = 1$, für $x \in [2k+1, 2k+2)$ ist $f(x, y) = -\mathbf{1}_{[k, k+1)}(y)$, also $\int f(x, y) dy = -1$. Für $x < 0$ ist $f(x, y) = 0$. Es folgt, dass $|\int f(x, y) dy| = 1$ für alle $x \geq 0$ ist. Damit ist $x \mapsto |\int f(x, y) dy|$ nicht integrierbar und das zweite Integral existiert nicht.

Wäre f integrierbar, würden nach dem Satz von Fubini beide Integrale existieren.

Aufgabe 4: $\mathbf{1}_{A_k}$ ist der punktweise Limes der monoton wachsenden Folge der Treppenfunktionen

$$\sup_{m \leq N} \mathbf{1}_{\left[\frac{\sqrt{k}}{2^m}, \frac{\sqrt{k+1}}{2^m}\right]},$$

also ist nach dem kleinen Satz von Levi:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{1}_{A_k} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \sup_{m \leq N} \mathbf{1}_{\left[\frac{\sqrt{k}}{2^m}, \frac{\sqrt{k+1}}{2^m}\right]} \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int \sum_{m=0}^N \mathbf{1}_{\left[\frac{\sqrt{k}}{2^m}, \frac{\sqrt{k+1}}{2^m}\right]} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{2^m} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \end{aligned}$$

Dies konvergiert für $k \rightarrow \infty$ gegen 0, also konvergiert die Folge $\|\mathbf{1}_{A_k}\|_1$ gegen 0, das heißt, $\mathbf{1}_{A_k}$ ist L^1 -konvergent gegen 0.

Sei nun $x > 0$. Wir zeigen, dass $\mathbf{1}_{A_k}(x)$ für unendlich viele k den Wert 0 und für unendlich viele k den Wert 1 annimmt. Sei hierzu $K \in \mathbb{N}$ gegeben.

Wähle $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\sqrt{K} \leq 2^m x$ ist. Dann gibt es ein $k \geq K$, so dass $\sqrt{k} \leq 2^m x \leq \sqrt{k+1}$ ist. Es folgt $x \in \left[\frac{\sqrt{k}}{2^m}, \frac{\sqrt{k+1}}{2^m}\right]$, also $\mathbf{1}_{A_k}(x) = 1$.

Nun wähle $m' \in \mathbb{N}$ so groß, dass $2^{2m'+2}x^2 - 2^{2m'}x^2 > 2$ und $2^{2m'}x^2 > K$ ist. Dann gibt es ein k' , so dass $[k', k'+1] \subset (2^{2m'}x^2, 2^{2m'+2}x^2)$ ist und es folgt $k' \geq K$. Dann ist $2^{m'}x < \sqrt{k'} < \sqrt{k'+1} < 2^{m'+1}x$ und es gibt folglich kein m'' , so dass $2^{m''}x \in [\sqrt{k'}, \sqrt{k'+1}]$ ist, für das also $x \in \left[\frac{\sqrt{k'}}{2^{m''}}, \frac{\sqrt{k'+1}}{2^{m''}}\right]$ wäre. Es folgt $\mathbf{1}_{A_{k'}}(x) = 0$.